

# Zur Energieabgabe eines modulierten Ionenstrahls im Plasma mit Magnetfeld

Von R. KIPPENHAHN und H. L. DE VRIES

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München

(Z. Naturforschg. 15 a, 506—512 [1960]; eingegangen am 3. November 1959<sup>1</sup>)

A beam of ions penetrating a plasma perpendicular to a homogeneous magnetic field is investigated. The particle density of the beam may be modulated by varying the intensity of the ion source with the frequency  $\omega$ . For simplicity, the ions are assumed to move with equal velocity  $w$ . The modulation of the beam produces oscillations of the plasma and the ions of the beam will loose energy; therefore it should be possible to trap the injected particles in the plasma. Furthermore the kinetic energy of the trapped particles will be transformed into thermal energy of the plasma<sup>2</sup>.

The ion source is assumed to deliver a linear beam (of sufficiently small diameter). Upon being shot into a plasma with a magnetic field the ions will travel along a curved line. In order to treat the problem exactly one would have to solve simultaneously the equations of motion for the plasma coupled with those for the individual ions of the beam. We simplify the problem in that we do not solve the equation of motion of the ions in the beam. Instead we imagine that they are forced to travel in a straight beam.

The problem becomes especially simple if we assume the ion source to be a slit instead of a point source. Then the ions do not all travel along the same straight line, but in parallel straight lines in the plasma. The direction of motion is always perpendicular to the magnetic field. Then we may distinguish two cases of the relation of the field direction to the direction of the plane:

- 1) the field lines are parallel to the plane of the beam (parallel case, Fig. 1),
- 2) the field lines are normal to the plane (normal case, Fig. 3).

If the modulating frequency of the beam is small compared to the gyrofrequency of the electrons and compared to the plasma frequency, if the conductivity is infinite, and if the gas pressure in the plasma may be neglected, one obtains for the mean relative energy loss of an ion per cm of path, in the parallel case

$$2 \pi r_i \frac{N_2^2}{N_1} \frac{1}{P} \frac{Q+P-1}{(P-1)^{1/2}}, \quad (P > 1).$$

( $N_1$  number of particles per cm<sup>2</sup> of beam surface of the unmodulated part of the beam,  $N_2$  the number of ions per cm<sup>2</sup> of the modulated part,  $r_i$  the classical ion radius,  $P$  the square of the ratio of ion velocity to ALFVÉN velocity,  $Q$  the square of the ratio of the modulating frequency to the ion gyro-frequency.) In case of  $P$  equal to one the energy loss of the beam is infinite. For  $P < 1$  the energy loss will vanish identically. In the normal case the energy loss of each particle is in general of the same order of magnitude, and vanishes identically when  $P < 1$  and  $\omega$  is greater than the gyrofrequency of the ions. If the ions move with the ALFVÉN velocity, one has a resonance with an infinitely great loss of energy by radiation. In reality of course there will be damping because of the finite conductivity. Assuming  $N_1 = N_2 = 10^7$  particles (per cm<sup>2</sup> of the beam), the formula mentioned above in case of  $Q + P - 1/P(P-1)^{1/2} \approx 1$  will give a relative loss of energy per cm path of about  $10^{-8}$ , which means that a particle has to travel about 6 miles in order to suffer an energy loss of about 1%. This disappointingly small loss leads us to the conclusion that only in cases of resonance measurable effects can be expected. It is certain that the energy loss in the case of the resonance  $P=1$  will exceed the value estimated above by several powers of ten. A detailed discussion of this resonance has to take into account finite conductivity of the plasma.

## 1. Die Grundgleichungen

Im folgenden sollen Schwingungen eines Plasmas betrachtet werden, deren Frequenz klein ist gegenüber der Gyrofrequenz der Elektronen und gegenüber der Plasmafrequenz. Außerdem sollen die in den Schwingungen auftretenden Geschwindigkeiten klein sein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit, so daß in den MAXWELLSchen Gleichungen der Verschie-

bungsstrom vernachlässigt werden darf. Die elektrische Leitfähigkeit sei unendlich groß. Schließlich soll noch der Gasdruck vernachlässigt werden. Dann hat man die folgenden Grundgleichungen

$$\text{rot } \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{B}} \quad (1)$$

$$\text{rot } \mathfrak{B} = \frac{4\pi}{c} \dot{\mathfrak{j}}, \quad (2)$$

$$\varrho \dot{\mathfrak{v}} = \frac{1}{c} [\dot{\mathfrak{j}}, \mathfrak{B}], \quad (3)$$

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c} [\mathfrak{v}, \mathfrak{B}] + \frac{m_i}{e c \varrho} [\dot{\mathfrak{j}}, \mathfrak{B}], \quad (4)$$

<sup>1</sup> 2. Fassung eingegangen am 1. Juni 1960.

<sup>2</sup> The idea of using a modulated beam of ions for injection and heating is due to A. SCHLÜTER.



$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0. \quad (5)$$

Hierbei ist die Elektronenmasse gegenüber der Ionenmasse  $m_i$  vernachlässigt. Vor Anregung der Schwingungen sei das Plasma durchsetzt von einem homogenen Magnetfeld  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0$ , während  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{v}$  gleich Null seien. Die Schwingungen sollen angeregt werden durch einen senkrecht zu  $\mathfrak{B}_0$  gerichteten flächenhaften Strahl geladener Teilchen, z. B. Ionen. Diese Fläche nehmen wir als eben an. Damit wird die Krümmung der einzelnen Bahnen der Ionen im Magnetfeld vernachlässigt. Es wird also nicht die Bewegungsgleichung für die einzelnen Ionen des Strahls betrachtet, sondern nur die Bewegungsgleichung für das Plasma, das der Strahl durchdringt. Der Ionenstrahl wird in Form von Randbedingungen für das Plasma eingeführt; er stellt einen Flächenstrom  $\mathbf{j}^*$  dar. Wir richten das Koordinatensystem so ein, daß das homogene Magnetfeld die Richtung der  $x$ -Achse hat,

$$\mathfrak{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_x,$$

$\mathbf{e}_x$  Einheitsvektor in der  $x$ -Richtung, während sich der Strom in der Strahlebene in  $z$ -Richtung bewegen soll:

$$\mathbf{j}^* = I \mathbf{e}_z.$$

Die Normalenrichtung  $\mathbf{n}$  der Strahlfläche gegenüber  $\mathfrak{B}_0$  wird erst später festgelegt. Schwingungen im Plasma kann man nun dadurch anregen, daß man  $\mathbf{j}^*$  moduliert.  $\mathbf{j}_2^*$  sei eine Modulation über einem konstanten Grundstrom  $\mathbf{j}_1^*$ :

$$\mathbf{j}^* = \mathbf{j}_1^* + \mathbf{j}_2^* \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \mathbf{j}_1^* &= I_1 \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{j}_2^* &= I_2 e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (7)$$

$I_1, I_2$  sind konstant. Die dadurch angeregten Schwingungen ändern das Feld  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0$  ab in

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2. \quad (8)$$

Die Störung  $\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$  setzen wir gegenüber dem Betrag von  $\mathfrak{B}_0$  als klein voraus, die Aufteilung in zwei Summanden entspricht der Zerlegung (6), (siehe die Diskussion der Randbedingungen im nächsten Abschnitt). Ferner treten jetzt Störgrößen  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{v}$  auf, die ebenfalls als klein angenommen werden sollen, so daß man in (3) und (4) linearisieren kann:

$$\rho \mathbf{v} = \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathfrak{B}_0], \quad (9)$$

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathfrak{B}_0] + \frac{m_i}{e c \mathbf{v}} [\mathbf{j}, \mathfrak{B}_0]. \quad (10)$$

Damit haben wir als System von Grundgleichungen (1), (2), (5), (9), (10); es ist durch die Randbedingungen zu ergänzen.

## 2. Die Randbedingungen an der Strahlfläche

Der Raum, den das Plasma ausfüllt, wird durch die Strahlebene in zwei Gebiete  $G_>$  und  $G_<$  geteilt.  $\mathbf{n}$  sei der in das Gebiet  $G_>$  weisende Einheitsvektor der Flächennormalen. Dann hat man wegen (2) und (5) für das Magnetfeld (8) die folgenden Sprung- bzw. Stetigkeitsbedingungen:

$$[\mathbf{n}, [[\mathfrak{B}]]] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^*, \quad (11)$$

$$[[\mathbf{n}, \mathfrak{B}]] = 0. \quad (12)$$

Hierbei bedeutet das Symbol  $[[\ ]]$ , angewandt auf einen Skalar oder Vektor, den Sprung, den diese Größe erleidet, wenn man die Strahlebene in Richtung  $\mathbf{n}$  (also in Richtung von  $G_<$  nach  $G_>$ ) durchstößt.

Nun ist  $\mathfrak{B}_0$  ein räumlich und zeitlich konstantes Feld, es fällt aus (11) und (12) heraus.  $\mathfrak{B}_1$  soll  $\mathbf{j}_1^*$  entsprechen, dann kann man von (11) und (12)

$$[\mathbf{n}, [[\mathfrak{B}_1]]] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_1^*, \quad [[\mathbf{n}, \mathfrak{B}_1]] = 0$$

abspalten. Hieran und an den Grundgleichungen sieht man, daß

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1 &= \frac{2\pi}{c} I_1 [\mathbf{e}_z, \mathbf{n}] \text{ im Gebiet } G_>, \\ &= -\frac{2\pi}{c} I_1 [\mathbf{e}_z, \mathbf{n}] \text{ im Gebiet } G_< \end{aligned} \quad (13)$$

gesetzt werden kann. Damit ist auch  $\mathfrak{B}_1$  uninteressant. Es bleibt noch

$$[\mathbf{n}, [[\mathfrak{B}_2]]] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_2^*, \quad [[\mathbf{n}, \mathfrak{B}_2]] = 0.$$

In (1), (2) und (5) kann nun  $\mathfrak{B}$  durch  $\mathfrak{B}_2$  ersetzt werden. Zur Vereinfachung lassen wir dann bei  $\mathfrak{B}_2$  und bei  $\mathbf{j}_2^*$  (und also auch bei  $I_2$ ) den Index 2 wieder weg. Jetzt lauten die Randbedingungen für  $\mathfrak{B}$

$$[\mathbf{n}, [[\mathfrak{B}]]] = \frac{4\pi}{c} I e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_z, \quad (14)$$

$$[[\mathbf{n}, \mathfrak{B}]] = 0, \quad (15)$$

Sie stellen wegen (2) auch Randbedingungen für  $\mathbf{j}$  dar. Sie besagen dann, daß der im Plasma durch die Schwingungen erzeugte Strom  $\mathbf{j}$  den nicht flächendivergenzfreien Flächenstrom  $\mathbf{j}^*$  zu einem im ganzen Raum quellenfreien Strom ergänzt.

Da  $\mathfrak{B}$  in der Strahlfläche nicht unendlich werden darf, ergibt sich aus (1) als Randbedingung für  $\mathfrak{E}$

$$[n, [[\mathfrak{E}]]] = 0. \quad (16)$$

Durch (14), (15) und (16) ist eine eindeutige Bestimmung von  $\mathfrak{B}$  noch nicht gewährleistet. Wegen der Linearität der Grundgleichungen kann man nämlich stets Lösungen überlagern, die am Ionenstrahl stetig sind. Um diese auszuschließen, benötigen wir Bedingungen für das Verhalten der Lösung, wenn man normal zur Strahlfläche ins Unendliche geht. Zunächst soll sie dort regulär sein. Ferner dürfen im Unendlichen keine Quellen der Energie liegen, d. h. die Lösung muß der „Ausstrahlungsbedingung“ genügen.

### 3. Differentialgleichungen für das Magnetfeld

Wegen (14) setzen wir  $\mathfrak{B}$  und dann auch  $\mathfrak{E}$ ,  $j$ ,  $v$  als periodisch in  $z$  und  $t$  an:

$$\partial_z = i k, \quad \partial_t = -i \omega.$$

Aus (9) und (10) läßt sich jetzt  $v$  eliminieren,

$$\mathfrak{E} = \frac{i B_0^2}{q \omega c^2} [e_x, [j, e_x]] + \frac{m_i B_0}{e c q} [j, e_x]. \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \partial_{xx} B_x + \partial_{yy} B_x + i q \partial_{xy} B_z + q k \partial_x B_y + k^2 (P-1) B_x &= 0, \\ \partial_{xx} B_y - \partial_{xy} B_x - i q \partial_{xx} B_z - q k \partial_x B_x + k^2 P B_y &= 0, \\ \partial_{xx} B_z + i q \partial_{xx} B_y - i q \partial_{xy} B_x + i k \partial_y B_y + k^2 (P-1) B_z &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Die Integration ist so vorzunehmen, daß die Lösung den Randbedingungen (14), (15) und (16) genügt. Die anderen das Plasma beschreibenden Größen erhält man durch Ausrechnen. (23) liefert das elektrische Feld, (2) den Strom. Schließlich bekommt man  $v$  aus (3):

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{i}{k} \frac{1}{4 \pi q P} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_x B_y - \partial_y B_x \\ \partial_x B_z - i k B_x \end{pmatrix} \quad (25)$$

In den folgenden beiden Abschnitten werden Lösungen für zwei verschiedene Lagen von  $\Pi$  gewonnen.

### 4. Die zum Magnetfeld parallele Strahlebene

Es sei (s. Abb. 1)

$$\Pi = e_y.$$

Wir machen den Ansatz

$$\partial_x = 0, \quad \partial_y = i m.$$

Wir führen die ALFVÉN-Geschwindigkeit  $v_A$  und die Gyrofrequenz  $\omega_i$  der Ionen des Plasmas im ungestörten Magnetfeld ein:

$$v_A^2 = \frac{B_0^2}{4 \pi q}, \quad \omega_i = \frac{e B_0}{m_i c}. \quad (18)$$

Ferner benutzen wir jetzt und später die Abkürzungen

$$q = \omega / \omega_i, \quad Q = q^2, \quad (19, 20)$$

$$w = \omega / k, \quad P = (w / v_A)^2. \quad (21, 22)$$

$w$  ist die Geschwindigkeit der Ionen im Strahl. Dann kann man (17) auch schreiben:

$$\mathfrak{E} = \frac{v_A^2}{\omega c} \frac{4 \pi}{c} \{ i ([j] - j_x e_x) + q [j, e_x] \}.$$

Mit (2) führe man nun statt  $j$  das Magnetfeld ein:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{v_A^2}{\omega c} \begin{pmatrix} 0 \\ -k B_x - i \partial_x B_z + q \partial_x B_y - q \partial_y B_x \\ i \partial_x B_y - i \partial_y B_x - i k q B_x + q \partial_x B_z \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Nach Rotationsbildung kann man mit (1) auch  $\mathfrak{E}$  eliminieren. Unter Verwendung von (5) bekommt man ein System von Differentialgleichungen für die Komponenten von  $\mathfrak{B}$  allein:

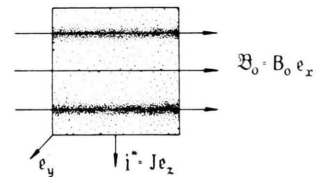


Abb. 1. Die Ionenstrahlebene in Parallel-Lage.

Von (24) bleibt bei  $P \neq 0, 1$

$$[m^2 - k^2 (P-1)] B_x = 0, \quad B_y = 0, \quad B_z = 0.$$

Es existieren also nichtverschwindende Lösungen, wenn die Dispersionsrelation

$$m^2 = k^2 (P-1) \quad (26)$$

erfüllt ist. Sie hat zwei Wurzeln

$$m_1 = k \sqrt{P-1}, \quad m_2 = -k \sqrt{P-1} \quad \text{im Fall } P > 1 \quad (27)$$

beziehungsweise

$$m_1 = i k \sqrt{1-P}, \quad m_2 = -i k \sqrt{1-P} \text{ im Fall } P < 1. \quad (28)$$

Für das Gebiet  $G_>$  ( $y > 0$ ) nehme man als Lösung von (24)

$$B_x^> = C^> e^{i(m_1 y + \varphi)}, \quad B_y^> = 0, \quad B_z^> = 0, \quad (29)$$

$$\varphi = k z - \omega t,$$

für das Gebiet  $G_<$  ( $y < 0$ )

$$B_x^< = C^< e^{i(m_2 y + \varphi)}, \quad B_y^< = 0, \quad B_z^< = 0. \quad (30)$$

Dadurch ist erreicht, daß  $B_x^>$  bzw.  $B_x^<$  im Falle exponentieller Lösungen ( $P < 1$ ) für  $y \rightarrow +\infty$  bzw. für  $y \rightarrow -\infty$  verschwinden, bzw. im Falle oszillatorischer Lösungen ( $P > 1$ ) der früher erwähnten Ausstrahlungsbedingung genügen.  $C^>$  und  $C^<$  sind Konstante, die durch die Randbedingungen zu bestimmen sind. (15) lautet in unserem Fall

$$[[B_y]] = 0$$

und ist automatisch erfüllt. (14) ist jetzt

$$-[[B_x]] = \frac{4\pi}{c} I e^{i\varphi},$$

d. h. nach (29) und (30)

$$-C^> + C^< = \frac{4\pi}{c} I.$$

Aus (23) erhält man mit (29) und (30)  $\mathfrak{E}^>$  und  $\mathfrak{E}^<$ . (16) lautet dann

$$(m_1 - i k q) C^> + (m_2 + i k q) C^< = 0.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen bestimmen sich  $C^>$  und  $C^<$ . In  $G_>$  wird mit  $\varphi = k z - \omega t$

$$\mathfrak{B}^> = -\frac{2\pi I}{c} \begin{pmatrix} 1 + \frac{i q k}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i m_1 y + i \varphi}, \quad (31)$$

$$\mathfrak{E}^> = \frac{2\pi I}{c^2} \frac{v_A^2}{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - Q + \frac{i q k P}{m_1} \\ -k \frac{Q + P - 1}{m_1} \end{pmatrix} e^{i m_1 y + i \varphi}. \quad (32)$$

Die Lösung  $\mathfrak{B}^<$ ,  $\mathfrak{E}^<$  in  $G_<$  bekommt man hieraus durch die Substitution

$$I \rightarrow -I, \quad m_1 \rightarrow m_2. \quad (33)$$

Der Energietransport wird durch den POYNTING-Vektor beschrieben:

$$\mathfrak{S}^> = \frac{c}{4\pi} [\mathfrak{E}^>, \mathfrak{B}^>].$$

Wir müssen ihn mit den Realteilen von (31) und (32) bilden. Von ihm interessiert nur der zeitliche Mittelwert  $\mathfrak{S}^>$ . Entsprechend dem Vorzeichen von  $P - 1$  führt sich eine Fallunterscheidung ein.

Im Fall  $P < 1$  wird

$$\bar{S}_y^> = \bar{S}_y^< = 0. \quad (34)$$

Senkrecht zur Strahlebene wird demnach im zeitlichen Mittel keine Energie abgestrahlt.

Im Fall  $P > 1$  wird

$$\mathfrak{S}^> = \frac{\pi v_A I^2}{2 c^2} \frac{Q + P - 1}{P^{1/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/(P-1)^{1/2} \\ 1/P-1 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

$\mathfrak{S}^<$  erhält man hieraus durch (33), d. h. durch die Substitution

$$(P-1)^{1/2} \rightarrow -(P-1)^{1/2}.$$

Die Energieabstrahlung normal zur Ionenstrahlfläche ist also symmetrisch, eine Folge der Ausstrahlungsbedingung. Es gilt ferner

$$(\bar{j}^*, \mathfrak{E}) = -[[\bar{S}_y]], \quad (36)$$

d. h. aber, daß die gesamte abgestrahlte mittlere Energie gleich ist der Arbeit, welche die Ionen des Strahls beim Anlaufen gegen das elektrische Feld verlieren. Wir lassen jetzt die Zeichen  $>$  und  $<$  weg.

Physikalisch interessant ist die Resonanzstelle  $P \rightarrow 1$ , in der also die Geschwindigkeit der Strahlionen gleich der ALFVÉN-Geschwindigkeit wird. Die Energieabstrahlung wird dann unendlich.

Der Betrag des gemittelten POYNTING-Vektors ist

$$\bar{S} = \frac{\pi v_A I^2}{2 c^2} \frac{Q + P - 1}{P - 1}.$$

Seine Richtung ist wegen (26) gleich derjenigen des Vektors  $(0, m_1, k)$ . Das ist aber andererseits die Normalenrichtung der Ebene konstanter Phase  $m_1 y + k z - \omega t = \text{const.}$  Mit (26), (21) und (22) sieht man, daß sich diese Ebene mit ALFVÉN-Geschwindigkeit  $v_A$  fortbewegt,

$$\frac{\omega}{(m_1^2 + k^2)^{1/2}} = v_A.$$

Sie schneidet die  $z$ -Achse stets am Ort desselben (sich bewegenden) Strahlions. Oder anders gesagt, jedes Strahlion führt einen MACHSchen Kegel mit sich, siehe Abb. 2.

Neben dem Energietransport soll auch der Transport von  $z$ -Impuls in  $y$ -Richtung untersucht werden.

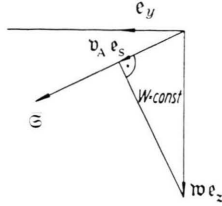


Abb. 2. Zur Veranschaulichung der Energieausbreitung im Fall  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_y$ .  $\mathbf{e}_s$  ist der Einheitsvektor in Richtung  $\mathbf{z}$ .

$$\text{Es ist } \mathbf{z} = \frac{\pi I_2^2}{2 c_2^2} \frac{Q+P-1}{P-1} v_A \mathbf{e}_s \\ \text{und } W = m_1 y + k z - \omega t = \text{const.}$$

Der Impulstransporttensor lautet allgemein

$$T_{ik} = \varrho v_i v_k + \frac{1}{4\pi} \left( \frac{B^2}{2} \delta_{ik} - B_i B_k \right). \quad (37)$$

Hier interessiert uns der zeitliche Mittelwert der Komponente  $T_{yz}$ . Es ist

$$\overline{T}_{yz} = \frac{\pi I_2^2}{2 c^2} \frac{Q+P-1}{P^{1/2}(P-1)^{1/2}} \frac{v_A}{w}.$$

Damit folgt in unserem Fall  $P > 1$

$$\overline{S}_y / \overline{T}_{yz} = w. \quad (38)$$

Diese Beziehung läßt eine anschauliche Deutung zu. Der  $z$ -Impuls eines Ions ist  $p_z = m_1 w$ , seine kinetische Energie  $E = m_1 w^2/2$ . Das Ion kann Energie und  $z$ -Impuls nur dadurch verlieren, daß es seine Geschwindigkeit verringert. Daraus folgt für die Änderungen  $\partial_t p_z$ ,  $\partial_t E$  der Zusammenhang

$$\partial_t E / \partial_t p_z = w.$$

Das Plasma entzieht also dem Ionenstrahl mit jeder Energiemenge gleichzeitig diejenige Menge an  $z$ -Impuls, die aus dem Bild einer einfachen Abbremsung der Teilchen folgt. Dieses Ergebnis ist nicht trivial, denn in den Grundgleichungen für das Plasma und in den Randbedingungen zur Beschreibung des Strahls wurde vom Teilchenbild des Strahls kein Gebrauch gemacht. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, daß Energie- und Impulsabstrahlung nicht immer so einfach interpretiert werden können.

Der Energieverlust eines Ions läßt sich aus der  $y$ -Komponente des POYNTING-Vektors einfach berechnen. Dazu führen wir die Anzahl  $N_2$  der modulierten Ionen pro  $\text{cm}^2$  Strahlfläche ein,

$$N_2 = I_2 / e w.$$

(Es sei daran erinnert, daß der Index 2 bei  $I_2$  zuletzt stets weggelassen worden war.) Entsprechend ist

$$N_1 = I_1 / e w$$

die Anzahl der Teilchen pro  $\text{cm}^2$  Strahlfläche des unmodulierten Grundstromes. Dann ist der mittlere Energieverlust pro sec  $\partial_t E$  eines Ions des Strahls

$$\overline{\partial_t E} = \frac{\pi e^2 v_A w^2 N_2^2}{c^2 N_1} \frac{Q+P-1}{P^{1/2}(P-1)^{1/2}},$$

wobei berücksichtigt ist, daß  $S_y$  nur die Ausstrahlung in positiver  $y$ -Richtung darstellt, während eine ebenso große Energiemenge in die negative  $y$ -Richtung fließt.

Der relative mittlere Energieverlust pro sec ist

$$\overline{\partial_t E} / E = 2 \pi r_i v_A \frac{N_2^2}{N_1} \frac{Q+P-1}{P^{1/2}(P-1)^{1/2}},$$

wobei  $r_i = e^2 / m_i c^2$  der klassische Ionenradius ist. Für den mittleren Energieverlust eines Ions pro cm zurückgelegten Weges erhält man dann

$$\overline{\partial_z E} / E = 2 \pi r_i \frac{N_2^2}{N_1 P} \frac{Q+P-1}{(P-1)^{1/2}}$$

## 5. Die zum Magnetfeld senkrechte Strahlebene

Es sei (s. Abb. 3)  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$ .

Wir machen den Ansatz  $\partial_x = i l$ ,  $\partial_y = 0$ .

Von (24) bleibt

$$\begin{aligned} [l^2 - k^2(P-1)] B_x - i q k l B_y &= 0, \\ i q k l B_x + [l^2 - k^2 P] B_y - i q l^2 B_z &= 0, \\ i q l^2 B_y + [l^2 - k^2(P-1)] B_z &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

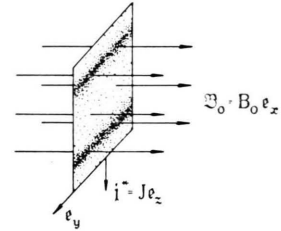


Abb. 3. Die Ionenstrahlebene in Senkrecht-Lage.

Dazu kommt die Divergenzfreiheit von  $\mathfrak{B}$ ,

$$l B_x + k B_z = 0.$$

Dann folgt die erste Gleichung von (39) aber aus der letzten, und man kann sie weglassen. Eliminiert man aus der zweiten  $B_x$ , so hat man, wenn man zur Abkürzung

$$L = l^2 / k^2$$

$$\text{setzt, nur noch } \begin{aligned} i q L B_y + (L - P + 1) B_z &= 0 \\ (L - P) B_y - i q (1 + L) B_z &= 0, \end{aligned}$$

zu betrachten. Bedingung für die Lösbarkeit dieses

Systems ist das Verschwinden der Determinante

$$(1-Q)L^2 + (1-2P-Q)L - P(1-P) = 0. \quad (40)$$

Die Lösungen sind

$$L_{1,2} = \frac{1}{2(Q-1)} [(1-2P-Q) \pm \sqrt{(1-Q)^2 + 4QP^2}], \quad (41)$$

wobei für  $L_1$  das Pluszeichen, für  $L_2$  das Minuszeichen gelten soll.  $L_1$  und  $L_2$  sind stets reell. Insgesamt hat man vier Werte  $l_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, 4$ :

$$l_1 = k\sqrt{L_1}, \quad l_2 = k\sqrt{L_2}, \quad l_3 = -k\sqrt{L_1}, \quad l_4 = -k\sqrt{L_2}, \quad (42)$$

wenn  $L_1, L_2 > 0$ . Für negative  $L_\alpha$  ist diese Definition für das Paar  $l_\alpha, l_{\alpha+2}$  zu ersetzen durch die entsprechende aus

$$\begin{aligned} l_1 &= ik\sqrt{-L_1}, & l_2 &= ik\sqrt{-L_2}, \\ l_3 &= -ik\sqrt{-L_1}, & l_4 &= -ik\sqrt{-L_2}. \end{aligned} \quad (43)$$

An der quadratischen Gl. (40) liest man die Vorzeichen von  $L_1, L_2$  in Abhängigkeit von  $P$  und  $Q$  ab,

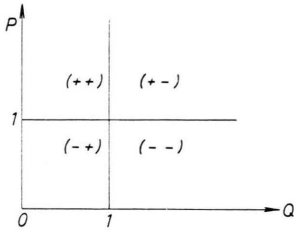


Abb. 4. Die Vorzeichen der Lösungen von (40) in Abhängigkeit von  $P$  und  $Q$ . Das Symbol  $(+-)$  z. B. bedeutet  $L_1 > 0, L_2 < 0$ .

siehe Abb. 4. Wir führen jetzt die Abkürzungen ein

$$N_\alpha = L_\alpha - P + 1, \quad (44)$$

$$W_\alpha = \exp[i(l_\alpha x + k z - \omega t)], \quad \alpha = 1, 2,$$

$K_i$  Integrationskonstanten,  $i = 1, \dots, 4$ .

In  $G_>$  kann man dann als Lösung von (24) nehmen

$$\begin{aligned} B_x^> &= i q \frac{l_1}{k N_1} K_1 W_1 + i q \frac{l_2}{k N_2} K_2 W_2, \\ B_y^> &= K_1 W_1 + K_2 W_2, \\ B_z^> &= -i q \frac{L_1}{N_1} K_1 W_1 - i q \frac{L_2}{N_2} K_2 W_2, \end{aligned} \quad (45)$$

in  $G_<$  die Lösung, die hieraus hervorgeht, wenn man die Substitution macht

$$l_1 \rightarrow l_3 = -l_1, \quad l_2 \rightarrow l_4 = -l_2, \quad (46)$$

$$K_1 \rightarrow K_3, \quad K_2 \rightarrow K_4. \quad (47)$$

Dabei hängt (46) mit der Definition der Wurzeln in (42) oder (43) zusammen. Diese Auswahl der Lösungen garantiert wieder das Verschwinden für  $x \rightarrow +\infty$  und  $x \rightarrow -\infty$  bei exponentiellen Lösungen ( $L_1$  oder  $L_2$  oder beide negativ!) bzw. das Erfülltsein der Ausstrahlungsbedingung.

Aus  $\mathfrak{B}^>$  und  $\mathfrak{B}^<$  bekommt man mit (23)  $\mathfrak{E}^>$  und  $\mathfrak{E}^<$ . Die Randbedingungen (14) bis (16) legen dann die  $K_i$  fest,  $i = 1, \dots, 4$ .

Setzt man zur Abkürzung

$$M = \frac{1}{(L_1 - L_2)(P - 1)},$$

so ergibt sich als Magnetfeld

$$\frac{c}{2\pi I} \begin{pmatrix} B_x^> \\ B_y^> \\ B_z^> \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} i q k L_1 L_2 \left[ \frac{W_1}{l_1} - \frac{W_2}{l_2} \right] \\ L_2 N_1 W_1 - L_1 N_2 W_2 \\ -i q L_1 L_2 [W_1 - W_2] \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Die Lösung  $\mathfrak{B}^<$  geht hieraus durch die Substitution

$$l_1 \rightarrow -l_1, \quad l_2 \rightarrow -l_2, \quad I \rightarrow -I \quad (49)$$

hervor. Für das elektrische Feld erhält man

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{\pi v_A I} \begin{pmatrix} E_x^> \\ E_y^> \\ E_z^> \end{pmatrix} &= -2 k \sqrt{P} M \begin{pmatrix} 0 \\ i q L_1 L_2 \left[ \frac{W_1}{l_1} - \frac{W_2}{l_2} \right] \\ L_2 N_1 \frac{W_1}{l_1} - L_1 N_2 \frac{W_2}{l_2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (50)$$

Nach Übergang zu den Realteilen von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{B}$  kann man den POYNTING-Vektor  $\bar{S}$  bilden. Von ihm interessiert vor allem das zeitliche Mittel der Komponente senkrecht zum Strahl. Man erhält nach einiger Rechnung

$$\begin{aligned} \frac{2 c^2}{\pi v_A P^2} \bar{S}_x &= \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{2} \left[ 1 + (-1)^\alpha \frac{1-Q}{[(1-Q)^2 + 4QP^2]^{1/2}} \right] \Re \sqrt{\frac{P}{L_\alpha}} \end{aligned}$$

$\Re$  bedeutet den Realteil der Wurzel, so daß also  $\bar{S}_x$  für  $P < 1, Q > 1$  verschwindet.

Die Komponenten  $\bar{S}_y, \bar{S}_z$  sind im Prinzip mit den in (48) und (50) angegebenen Komponenten von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{B}$  gegeben. Ihre Berechnung führt auf kompliziertere Ausdrücke, die zum Unterschied von  $\bar{S}_x$  noch von  $x$  abhängen. Wir bringen sie hier nicht.

